

יש לפרסם את כיתת האס f האחרת!!

מבחן גמר במתמטיקה

משך המבחן 45 שעות. אין לצאת ב-45 הדקות האחרונות של המבחן!
יש לפתור שתיים מהשאלות 1-3, שאלה 5 ואחת מהשאלות 4 או 6, שאלה 8 ואחת מהשאלות 7 או 9!
תיבדקנה רק התשובות הראשונות בכל מקבץ של שאלות בחירה!!!
סעיפים שונים באותה שאלה שווים בניקודם עד כדי נקודה, אלא אם רשום אחרת!
בכל שאלה חובה למצוא את כל התשובות. חובה לנמק כל תשובה ולפשטה ככל הניתן!
כל נוסחה שנעשה בה שימוש ואינה מופיעה בדף הנוסחאות - חייבת הוכחה!
כל משפט בגיאומטריה המישור שנעשה בו שימוש ושאינו מופיע ברשימת המשפטים - חייב הוכחה!
תזכורת! - חובה לשרטט בעזרת סרגל ומחוגה ולא ביד חופשית!

שאלה 1 (15%)

8% א. נתונה המשוואה $(m+2)4^x - (2m+1)2^x + m = 0$, m פרמטר ממשי. מצא את כל הערכים של m שעבורם קיים פתרון יחיד והוא שלילי.

7% ב. הוכח כי לכל n טבעי $2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{5n-1} + 2^{5n}$ מתחלק ב-62.

שאלה 2 (15%)

8% א. פתור: $1 + 2 \sin 2x \geq \cos 2x$.

4% ב. 1) צייר את גרף הפונקציה $y = |3 - |x - 2||$.

3% 2) עבור אילו ערכים של a יש למשוואה $||x - 2| - 3| = a$ ארבעה פתרונות?

שאלה 3 (15%)

במשולש ABC נתון: $BC = a$; $\angle B = \beta$; $\angle C = \gamma$. מעבירים מעגל שמרכזו A המשיק לצלע BC.

7% א. הוכח כי רדיוס המעגל שווה ל- $\frac{\alpha \sin \beta \sin \gamma}{\sin(\beta + \gamma)}$.

8% ב. אם בנוסף נתון כי $\angle A = \frac{\pi}{2}$, מה המקסימום האפשרי ל-R, כפונקציה של a ?

* * *

שאלה 4 (15%)

7% א. פתור: $5^4 \cdot 5^6 \cdot 5^8 \dots 5^{2n-2} \cdot 5^{2n} = (0.04)^{-27}$ (n מספר טבעי).

8% ב. פתור: $\frac{4 \cos^4 x}{(1 - \cos 2x)^2} - \frac{1}{\sin^2 x} = 2 + \operatorname{ctg}^2 x$.

שאלה 5 (15%) - שאלת חובה!
נתונה פירמידה SKLMN שבסיסה מקבילית KLMN,
כאשר $K(1,1,-1)$, $L(-6,1,2)$, $M(7,0,-3)$, $S(2,3,-3)$.

5% א. רשום את משוואת מישור הבסיס KLMN.

5% ב. חשב את נפח הפירמידה.

5% ג. דרך קדקוד S עובר ישר מקביל ל-KM.
מצא את המרחק מנקודה L לישר הנ"ל.

שאלה 6 (15%)

7% א. נתון מספר $a = p_1^2 \cdot p_2^3 \cdot p_3^4 \cdot \dots \cdot p_9^{10} \cdot p_{10}^{11}$ כאשר p_1, p_2, \dots, p_{10} מספרים ראשוניים שונים.
כמה מחלקים שונים כולל 1 ו-a יש למספר a? (המספר 1 אינו ראשוני)
(די בביטוי גולמי - אין צורך בחישוב סופי של המספר)

8% ב. מצא את a ואת b אם הפולינום

$$P(x) = a - bx + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^{2n-1} + x^{2n} + ax^{2n+1} + bx^{2n+2}$$

מתחלק ב- $(x^2 + x)$.

* * *

שאלה 7 (20%)

10% א. בתוך מעגל שרדיוסו R חסום משולש שווה-שוקיים ABC, $AB = AC$,
המשולש ABC מסתובב סביב גובהו AD ומתקבל חרוט ישר.
מצא את הגובה AD אם החרוט בעל נפח מקסימלי. נמק!

10% ב. מצא את השטח החסום על-ידי: ציר x, ציר y, העקום $y = 1 + \frac{x}{x^2 + 1}$,

והנורמל לעקום בנקודה $(1, \frac{3}{2})$.

שאלה 8 (20%) - שאלת חובה!

בטטראדר משוכלל ABCD שמקצועו a מעבירים מישור γ דרך D,
המקביל ל-AB וחוצה את נפח הטטראדר.
נסמן $L = \gamma \cap AC$, $K = \gamma \cap BC$.

10% א. חשב את LK כפונקציה של a.

10% ב. מצא את טנגנס הזווית בין γ ובין ABC.

שאלה 9 (20%)

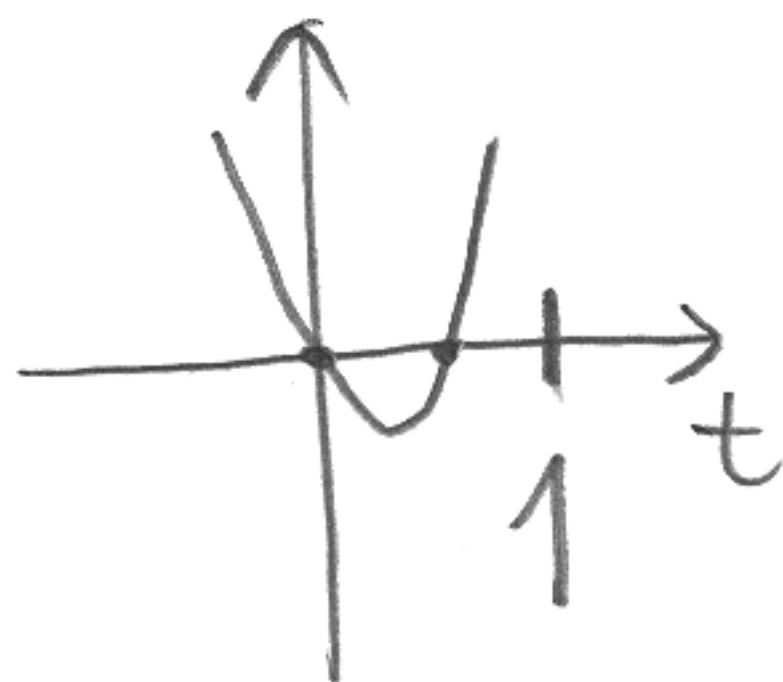
12% א. נתונה האליפסה $x^2 + 2y^2 = 3$ מצא את משוואת המעגל המשיק לאליפסה בנקודה $(1, -1)$
ועובר דרך הנקודה $(5, -1)$.

8% ב. פתור את המשוואה $z^3 + (1-i)^2(1+i)^4 = 0$.

בהצלחה!

1) אבא

(k)



$+ \frac{c}{a} = 0$
 \Rightarrow ק"ק

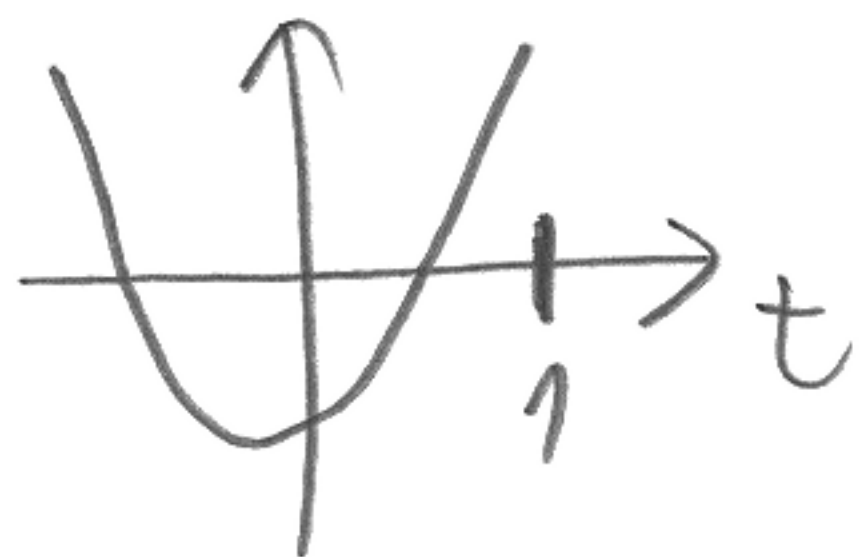
$\frac{m}{m+2} = 0$

$m = 0$ ✓

$2t^2 - t = 0$
 $t(2t - 1) = 0$
 $t = 0 \quad t = \frac{1}{2}$ ✓

$(m+2) \cdot 2^{2x} - (2m+1) \cdot 2^x + m = 0$

$(m+2)t^2 - (2m+1)t + m = 0$



$F(1) > 0$ ק"ק

$\frac{c}{a} < 0$

$1 - \frac{2m+1}{m+2} + \frac{m}{m+2} > 0$

$\frac{m+2 - 2m - 1 + m}{m+2} > 0$

$\frac{-m+1}{m+2} > 0$

$\frac{-m+1}{m+2} > 0$

$2 < m < 0$



$\Delta = 0$

\Rightarrow ק"ק

$(2m+1)^2 - 4m(m+2)$

$4m^2 + 4m + 1 - 4m^2 - 8m$

$1 - 4m = 0$

$m = \frac{1}{4}$ ✓

$\frac{9}{4}t^2 - \frac{3}{2}t + \frac{1}{4} = 0$

$(3t-1)^2 = 0$

$t = \frac{1}{3}$ ✓



$m = -2$

\Rightarrow ק"ק

$3t - 2 = 0$

$t = \frac{2}{3}$ ✓

$2^x = t > 0$

$x < 0$

$2^x < 2^0$

$0 < t_1 < 1$

א"א ק"ק



$m = \frac{1}{4}$
 $-2 \leq m \leq 0$



..... → 703

$$mt^2 - 2mt + m = -2t^2 + t$$

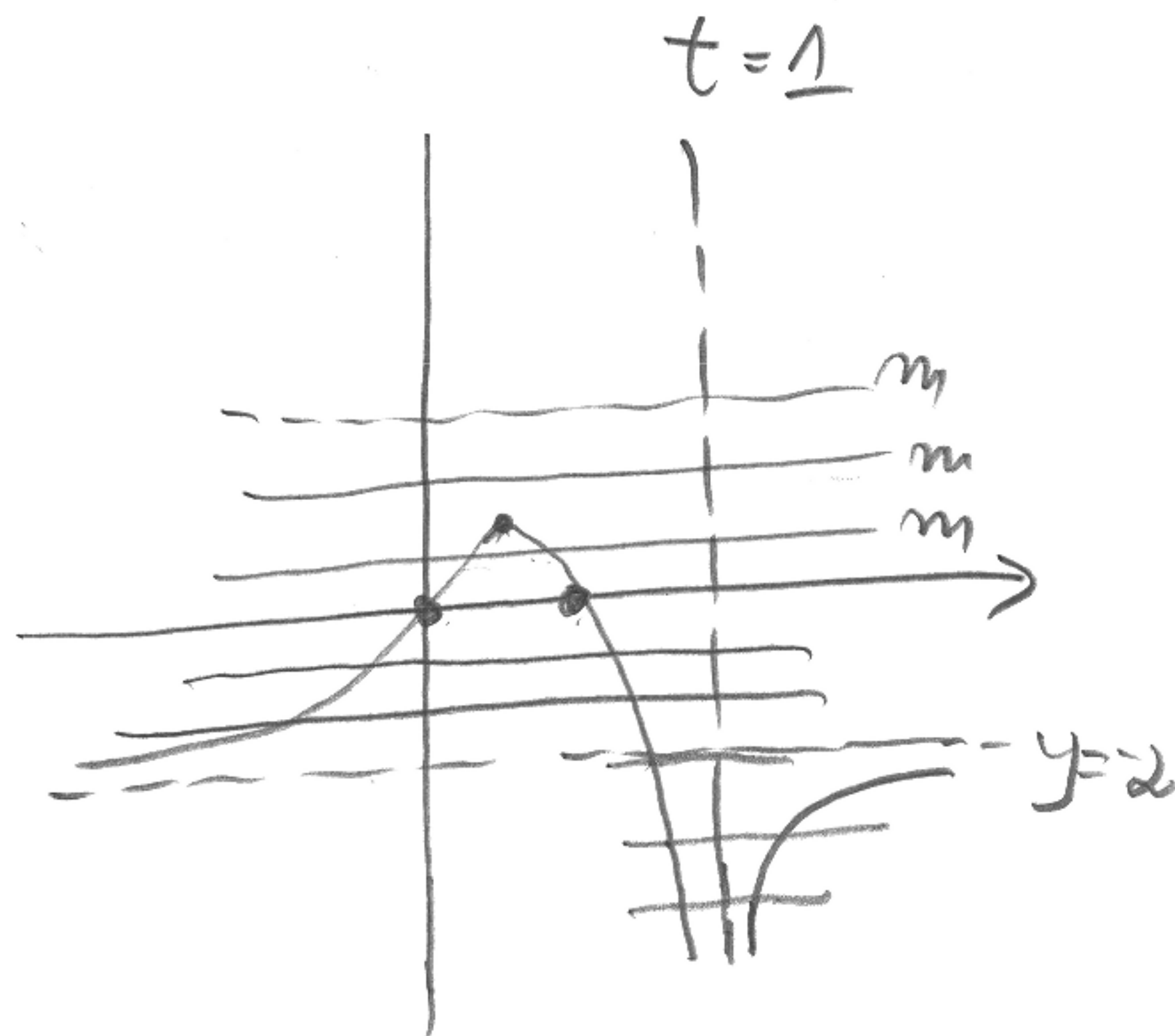
$$m(t^2 - 2t + 1) = -2t^2 + t$$

$$m(t-1)^2 = -2t^2 + t \quad (t \neq 1)$$

$$m = \frac{-2t^2 + t}{(t-1)^2}$$

$$C)' = \frac{(-4t+1)(t-1)^2 - 2(t-1)(-2t^2+t)}{(t-1)^4} =$$

$$\frac{(t-1)(-4t+1) - 2(t-2t^2)}{3t-1} \quad \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right) \text{ MAX}$$



$$\text{IK } m = \frac{1}{4}$$

$$-2 \leq m \leq 0$$

↓ $\int \frac{1}{3t-1} dt$ $\int \frac{1}{4} dt$ $\int \frac{1}{3t-1} dt$

2

$$2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{5n}$$

1, 2, 3, ..., 5n

איברי 5n

n=1 $2+4+8+16+32=62$

✓ נכון

✓ הנחה

$$2 + 2^2 + \dots + 2^{5n} + 2^{5n+1} + 2^{5n+2} + 2^{5n+3} + 2^{5n+4} + 2^{5n+5}$$

62
סדר הנחה

✓

$$2^{5n} (2 + 4 + 8 + 16 + 32)$$

62

של



של של !

(10)

$$1 + 2 \sin 2x \geq \cos 2x$$

$$1 - \cos 2x + 2 \sin 2x \geq 0$$

$$1 - (1 - 2 \sin^2 x) + 4 \sin x \cos x \geq 0$$

$$\sin^2 x + 2 \sin x \cos x \geq 0$$

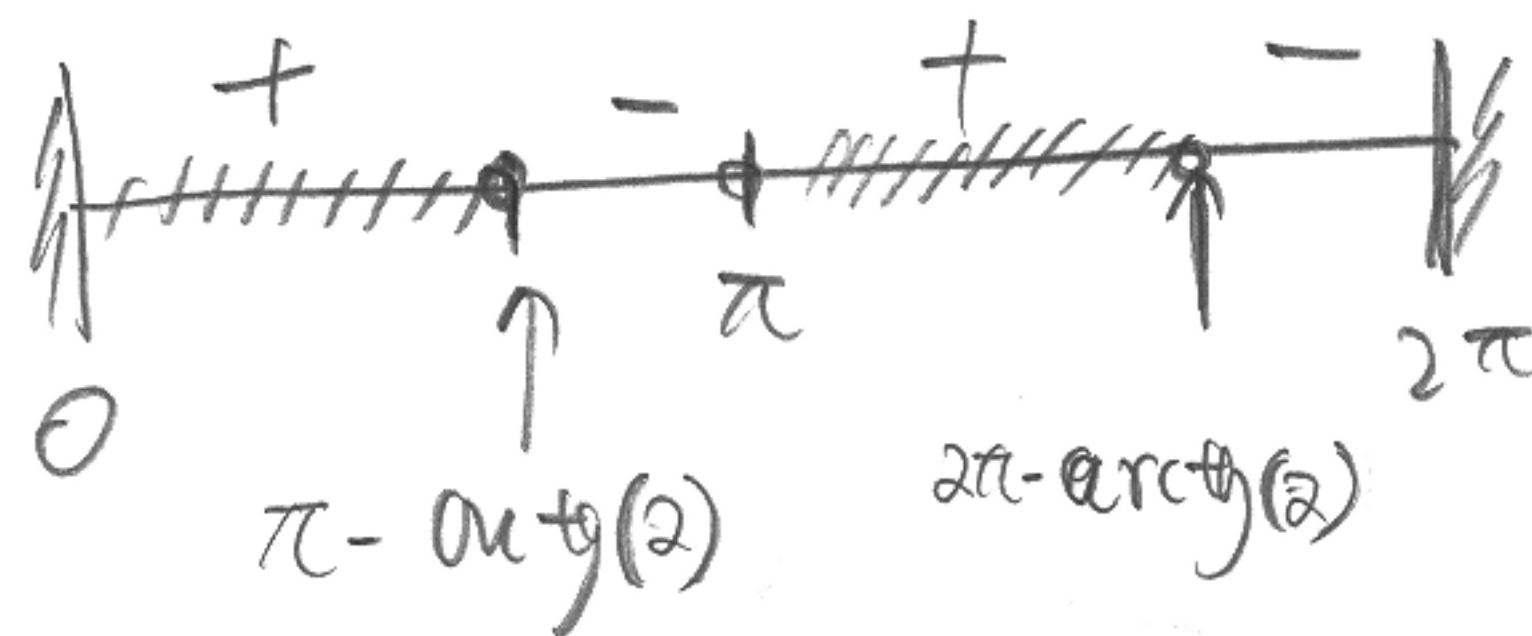
$$\sin x (\sin x + 2 \cos x) \geq 0$$

$$\sin x = 0 \quad \text{tg } x = -2$$

$$x = \pi k \quad x = \arctg(-2) + \pi k$$

$$x = \pi - \arctg 2 + \pi k$$

זכור



$$0 + \pi k \leq x \leq \pi - \arctg 2 + \pi k$$

②

$$y = |3 - |x-2||$$

$$x \geq 2 \Rightarrow y = |3 - x + 2| = |5 - x|$$

$$x < 2 \Rightarrow y = |3 + x - 2| = |1 + x|$$

$$x < 2$$

$$y = |1 + x|$$

$$x < -1$$

$$y = -1 - x$$

$(-1, 0)$

$$-1 \leq x < 2$$

$$y = 1 + x$$

$(2, 3)$

$$x \geq 2$$

$$y = |5 - x|$$

$$2 \leq x < 5$$

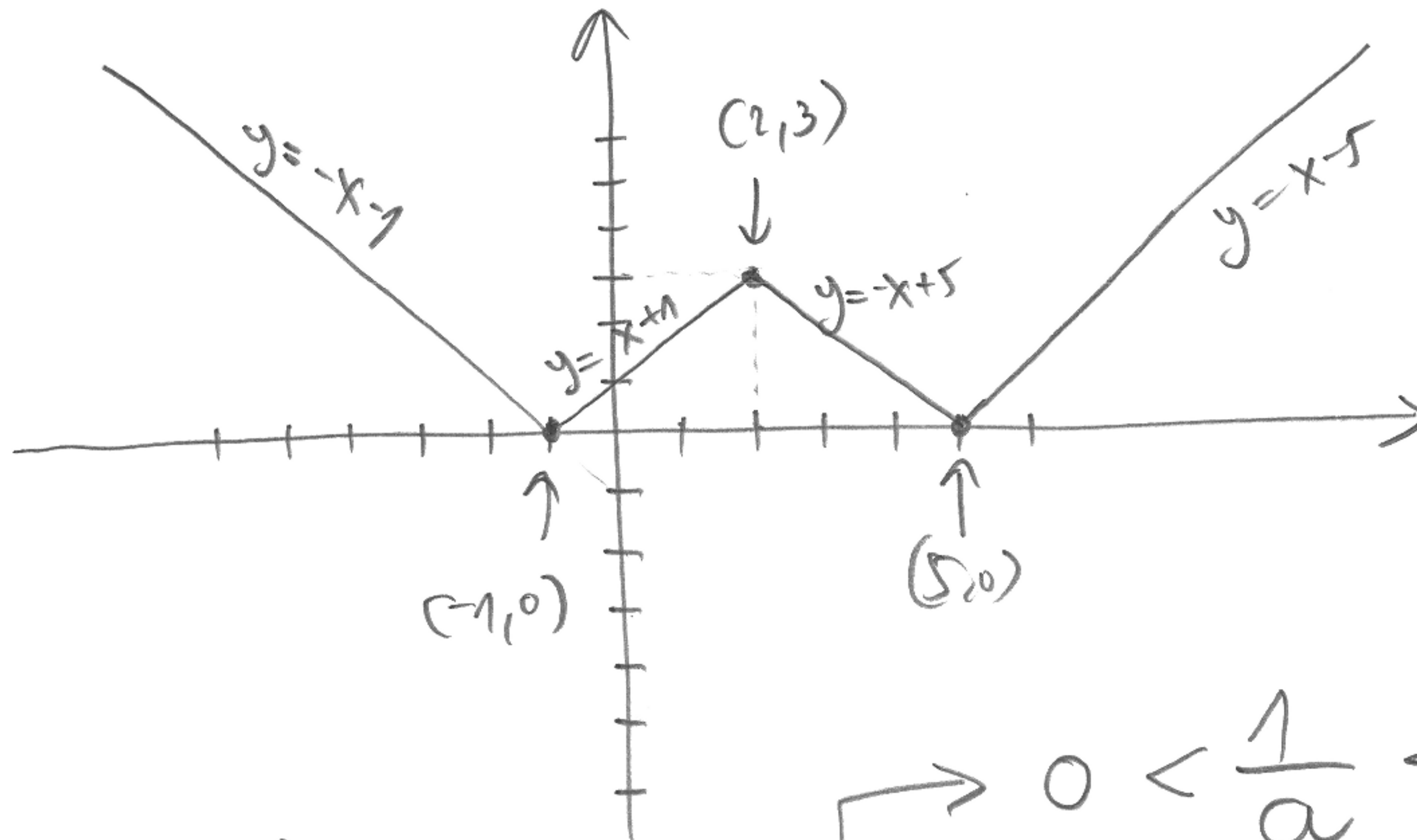
$$y = 5 - x$$

$$x \geq 5$$

$$y = -5 + x$$

$(5, 0)$

1



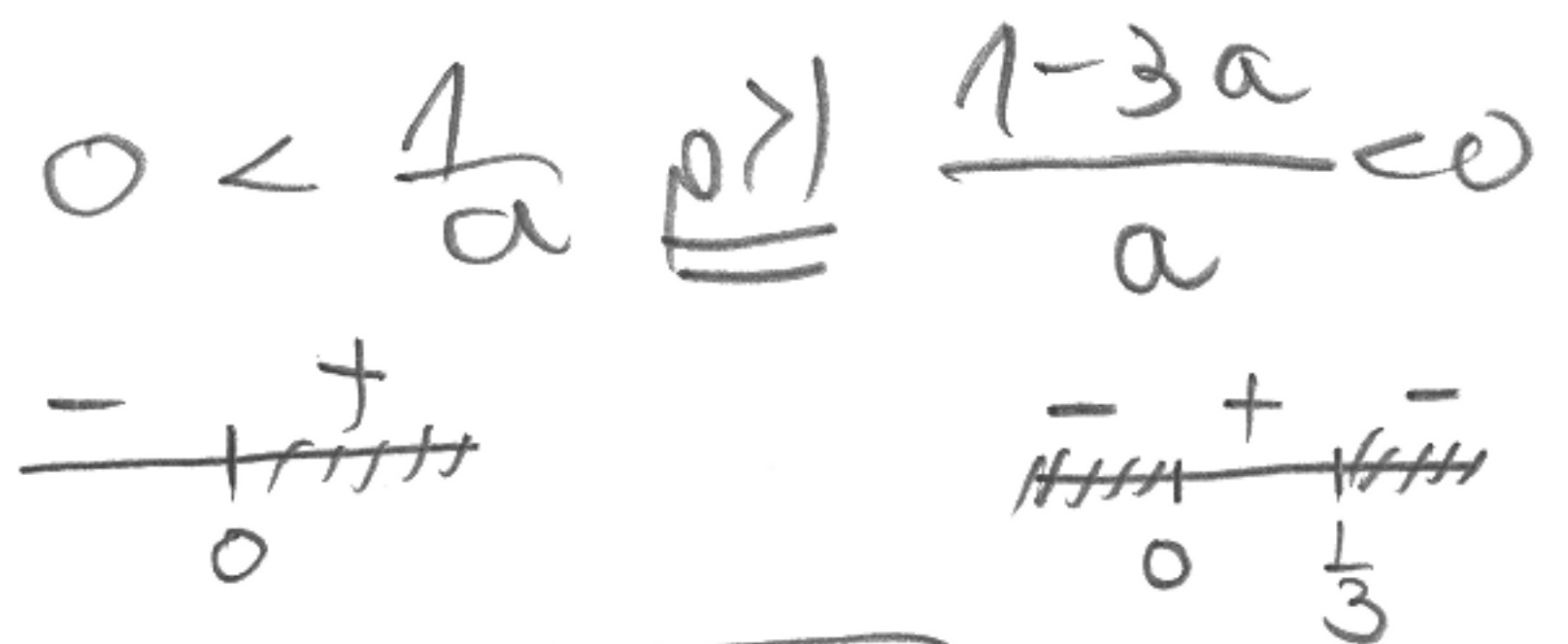
2

$$|x-2|-3 = \frac{1}{a}$$

$$|3-|x-2|| = \frac{1}{a}$$

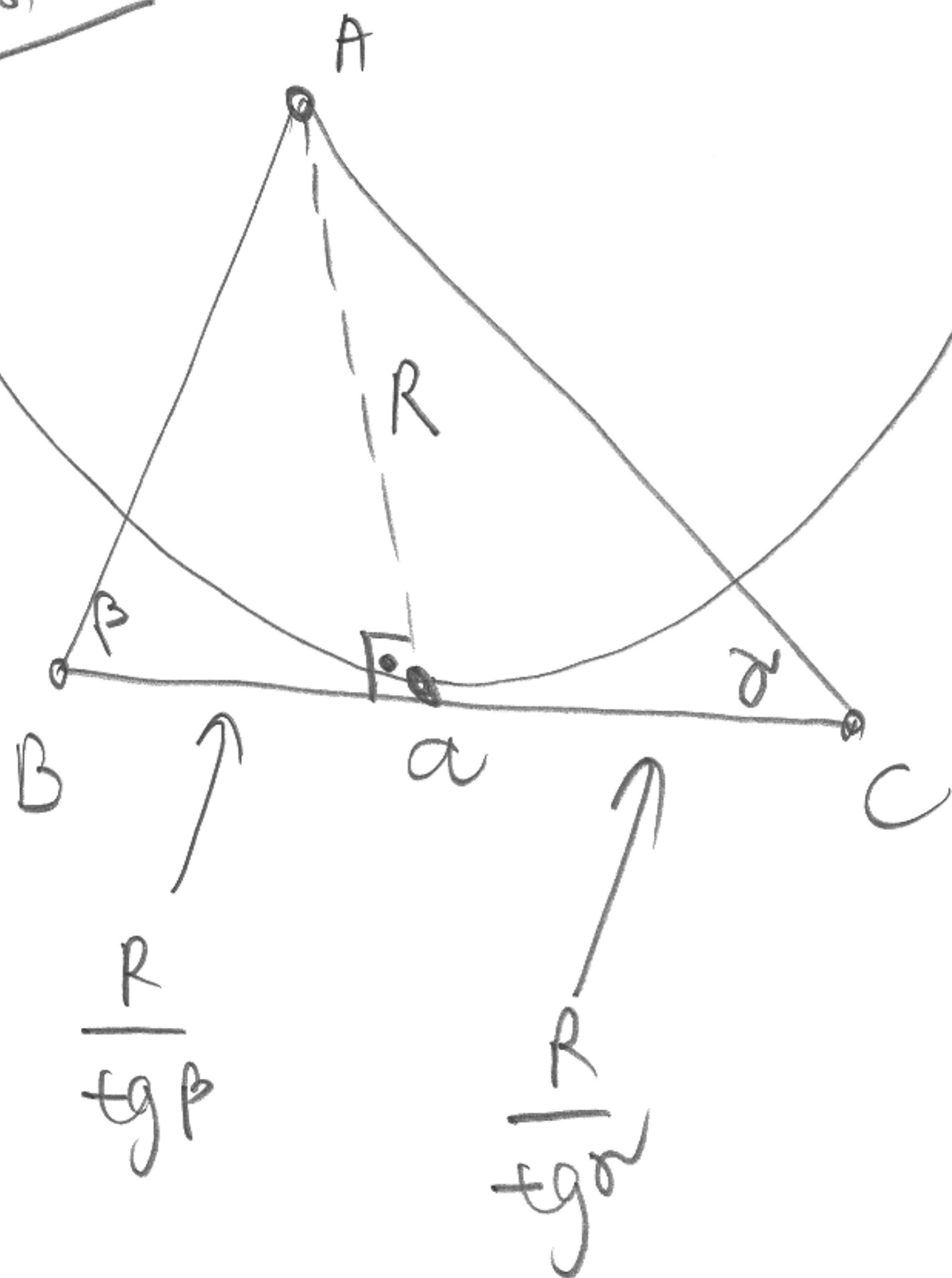
$a \neq 0$

$$0 < \frac{1}{a} < 3$$



$$a > \frac{1}{3}$$

37820



$$(k) \quad R \left(\frac{1}{\text{tg } \beta} + \frac{1}{\text{tg } \gamma} \right) = a$$

$$R \left(\frac{\cos \gamma}{\sin \gamma} + \frac{\cos \beta}{\sin \beta} \right) = a$$

$$R \left(\frac{\sin(\beta + \gamma)}{\sin \gamma \sin \beta} \right) = a$$

$$R = \frac{a \sin \beta \sin \gamma}{\sin(\beta + \gamma)}$$

$$\angle A = 90 \Rightarrow \beta + \gamma = 90$$

$$\beta = 90 - \gamma$$

$$\textcircled{?} R = \frac{a \sin(90 - \alpha) \cdot \sin \alpha}{\sin(90 - \alpha + \alpha)} = \frac{a \cos \alpha \cdot \sin \alpha}{\sin 90}$$

$$R = \frac{1}{2} a \underbrace{\sin 2\alpha}$$



$R_{\text{MAX}} = \frac{1}{2} a$

①
MAX

$$0 < \alpha < 90$$

$$0 < 2\alpha < 180$$

$$0 < \sin 2\alpha < 1$$

478/100

(k)

$$5^4 \cdot 5^6 \cdot 5^8 \cdot \dots \cdot 5^{2n-2} \cdot 5^{2n} = \left(\frac{4}{100}\right)^{-27} \frac{1}{25}$$

$$4, 6, 8, \dots, 2n$$

$$2n = 4 + (p-1) \cdot 2$$

$$2n = 4 + 2p - 2$$

$$2n - 2 = 2p$$

$$\boxed{n-1 = p}$$

$$5^{4+6+\dots+2n} = 5^{\frac{n-1}{2}(4+2n)}$$

$$= 5^{(n-1)(2+n)} = 5^{+54}$$

$$(n+2)(n-1) = +54$$

$$n^2 + n - 56$$

$$(n+8)(n-7) = 0$$

$$n = -8$$

$$\boxed{n = 7}$$

\emptyset

②

$$\frac{4\cos^4 x}{(1-\cos 2x)^2} - \frac{1}{\sin^2 x} = 2 + \cot^2 x$$

$$\frac{4\cos^4 x}{4\sin^4 x} - 1 - \cot^2 x = 2 + \cot^2 x$$

$$\cot^4 x - 3 - 2\cot^2 x = 0$$

$$t^4 - 2t^2 - 3 = 0$$

$$(t^2 - 3)(t^2 + 1) = 0$$

$$(t - \sqrt{3})(t + \sqrt{3}) = 0$$

$$\cot x = \sqrt{3}$$

$$\boxed{x = 30 + 180k} //$$

$$\cot x = -\sqrt{3}$$

$$\boxed{x = -30 + 180k} //$$

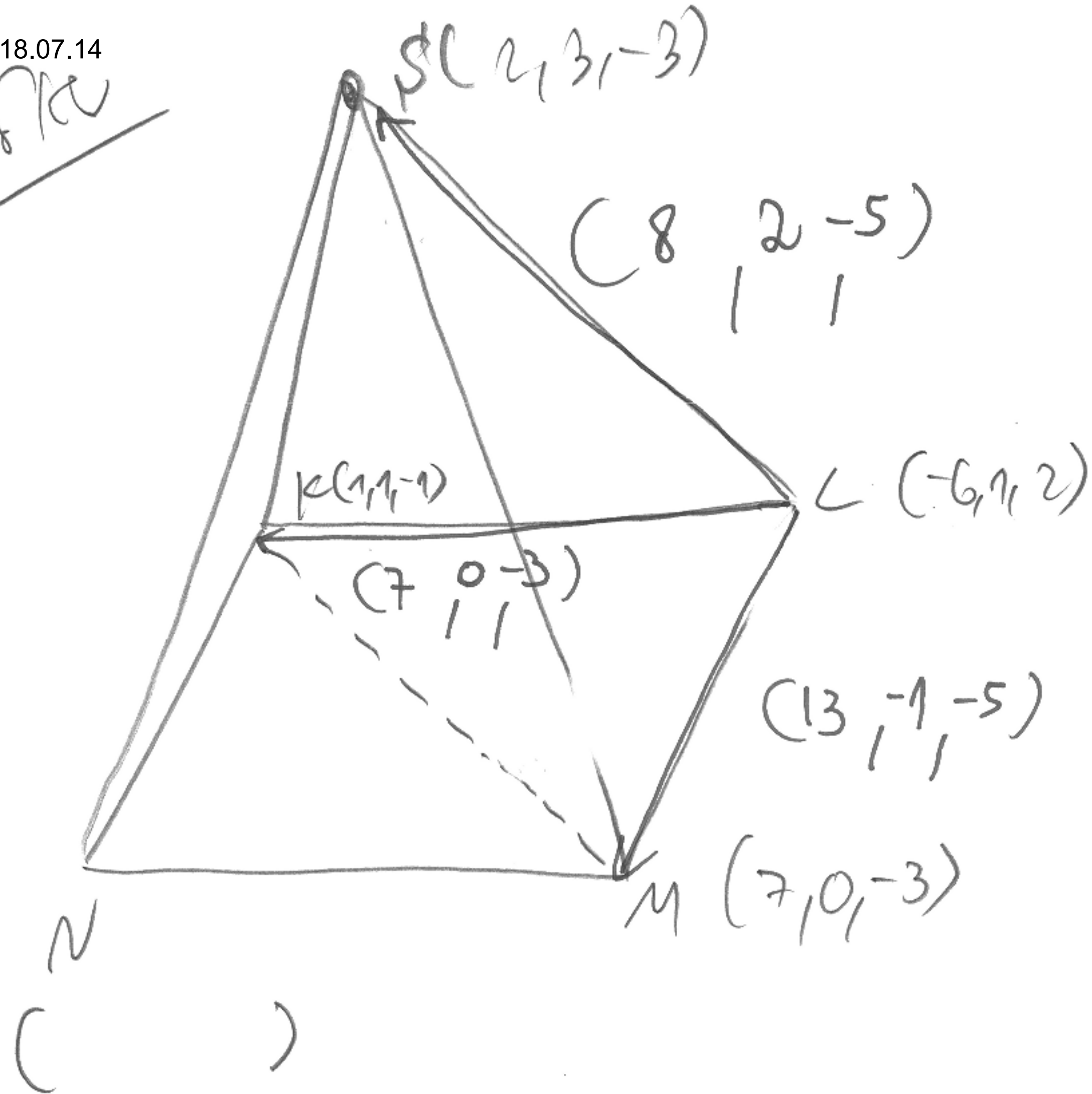
$$\frac{1 - \cos 2x}{1 - (1 - 2\sin^2 x)} = \frac{2\sin^2 x}{2\sin^2 x}$$

$$\frac{1}{\sin^4 x} = 1 + \cot^2 x$$

$\sin x \neq 0$	$1 - \cos 2x \neq 0$
	$\sin^4 x \neq 0$
	$\sin x \neq 0$

$$\boxed{x \neq \pi k}$$

5 אפריל



(k)

A	B	C
7	0	-3
13	-1	-5

$\vec{n} = (-3, -4, -7)$
 $(1, 1)$

$$-3x - 4y - 7z + 0 = 0$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 $1 \quad 1 \quad -1$

$$-3 - 4 + 7 + 0 = 0$$

$$D = 0$$

$3x + 4y + 7z = 0$

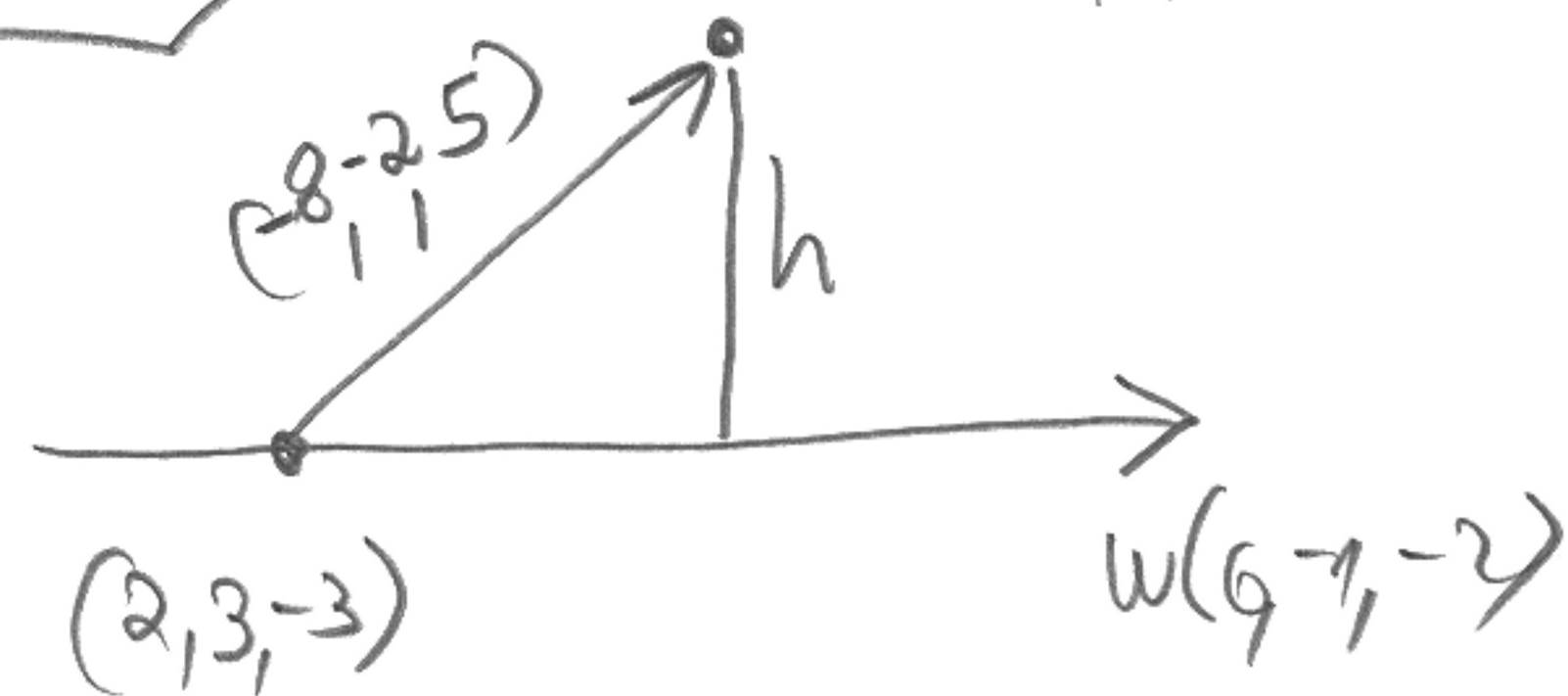
$-3x - 4y - 7z = 0$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 $(-6, 1, 2)$ (k)
 $(7, 0, -3)$ (3)

$$\textcircled{2} \left| \frac{\overbrace{(7, 0, -3) \times (13, -1, -5)}^{(-3, -4, -7)} \cdot (8, 2, -5)}{3} \right| = V$$

$$\left| \frac{-24 - 8 + 35}{3} \right| = \frac{3}{3} = 1 //$$

$$\textcircled{2} (2, 3, -3) + w(6, -1, -2)$$



$$h = \frac{\sqrt{9^2 + 14^2 + 20^2}}{\sqrt{6^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{\sqrt{677}}{\sqrt{41}} //$$

... שיבא שיכ //

A	B	C
6	-1	-2
-8	-2	5

$$(-9, -14, -20)$$

6.7.8.9

$$(k) \quad a = p_1^2 \cdot p_2^3 \cdot p_3^4 \cdots p_{10}^{11} \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 12 = \frac{12!}{2}$$

$$(2) \quad \frac{P(x)}{x(x+1)} = w(x) + \frac{0}{x(x+1)} \quad \begin{array}{l} \rightarrow P(0) = 0 \\ \rightarrow P(-1) = 0 \end{array}$$

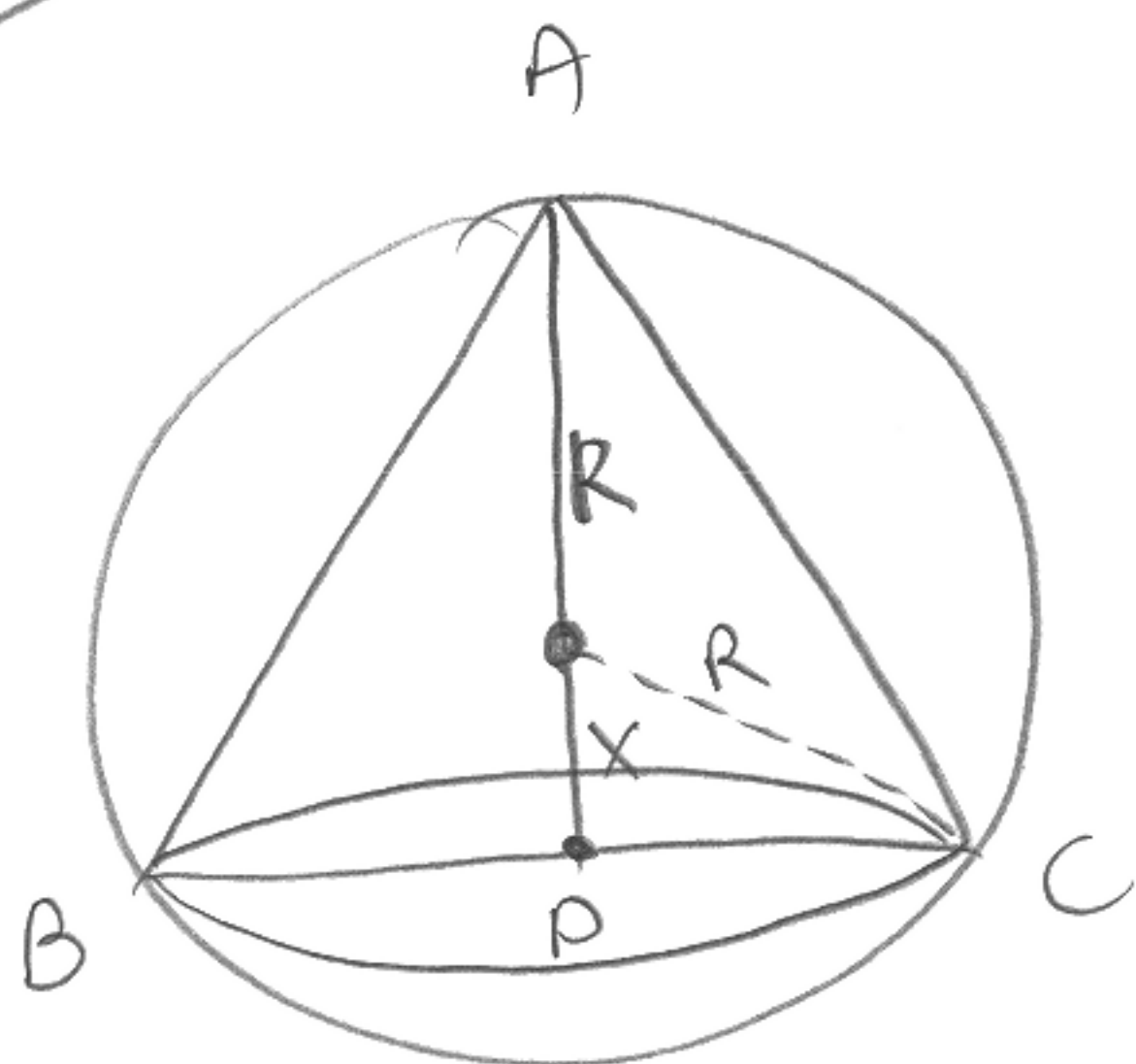
$$P(x) = a - bx + a \cdot x^{2n+1} + b \cdot x^{2n+2} + \left(\frac{x^2 (x^{2n-1} - 1)}{x-1} \right)$$

$$P(0) = \boxed{a = 0}$$

$$P(-1) = 0 = b + b + \frac{1(-1-1)}{(-1-1)} \Rightarrow 2b + 1 = 0 \quad \boxed{b = -\frac{1}{2}}$$

7.1.12

(1)



$$R^* = \sqrt{R^2 - x^2}$$

$$\frac{\pi R^{*2}}{3} \cdot (R+x)$$

$$\frac{\pi}{3} (R+x)(R^2 - x^2)$$

$$\frac{\pi}{3} (R^3 - x^2 R + R^2 x - x^3)$$

$$C)' = \frac{\pi}{3} (0 - 2xR + R^2 - 3x^2) = 0$$

$$- \frac{\pi}{3} (3x^2 + 2xR - R^2) = 0$$

$$3x^2 + 3xR - xR - R^2 = 0$$

$$3x(x+R) - R(x+R) = 0$$

$$(x+R)(3x-R) = 0$$

$$x = \frac{R}{3}$$

MAX

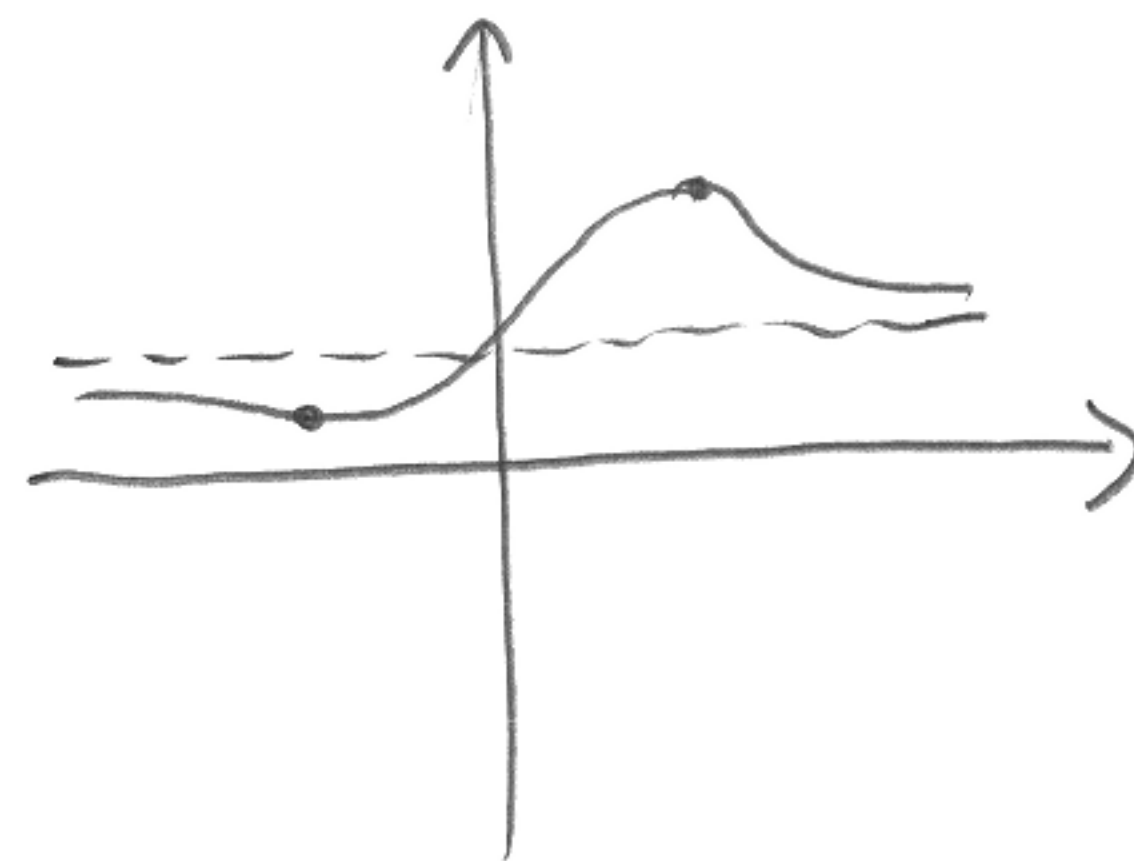
$$C)'' = -\frac{\pi}{3} (6x + 2R)$$

$$C)''_{-\frac{R}{3}} = -\frac{\pi}{3} (+) \Rightarrow \ominus$$

$$(H = AD_{MAX} = \frac{4}{3} R) //$$

②

$$y = 1 + \frac{x}{x^2+1}$$



$$(0, 1)$$

$$y' = 0 + \frac{1(x^2+1) - 2x \cdot x}{(x^2+1)^2}$$

$$0 = 1 + \frac{x}{x^2+1}$$

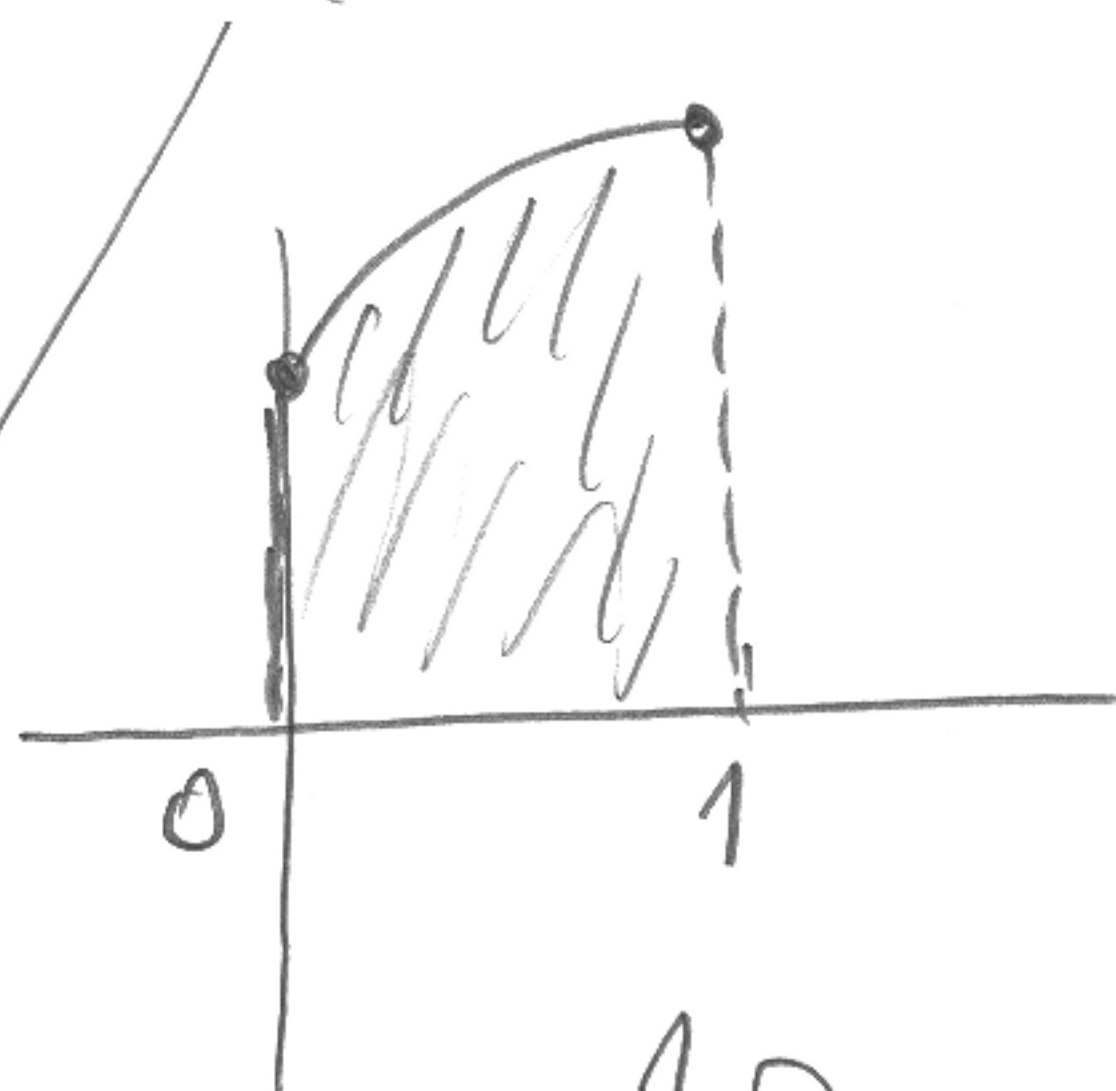
$$y' = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$y'(1) = 0$$

$$m = 0 \quad m_{\pm} = \infty$$

$$-x = x^2 + 1$$

$$x^2 + x + 1 = 0$$

$$\phi$$


$$\downarrow$$

$$\delta H(V) \cdot c_N$$

$$X = 1$$

$$1-x^2 = 0$$

$$\left(1, \frac{3}{2}\right) \quad \left(-1, \frac{1}{2}\right)$$

$$\int_0^1 \left(1 + \frac{x}{x^2+1}\right) dx$$

$$\int \frac{x}{x^2+1} dx$$

$$x^2 + 1 = t$$

$$2x dx = dt$$

$$x dx = \frac{1}{2} dt$$

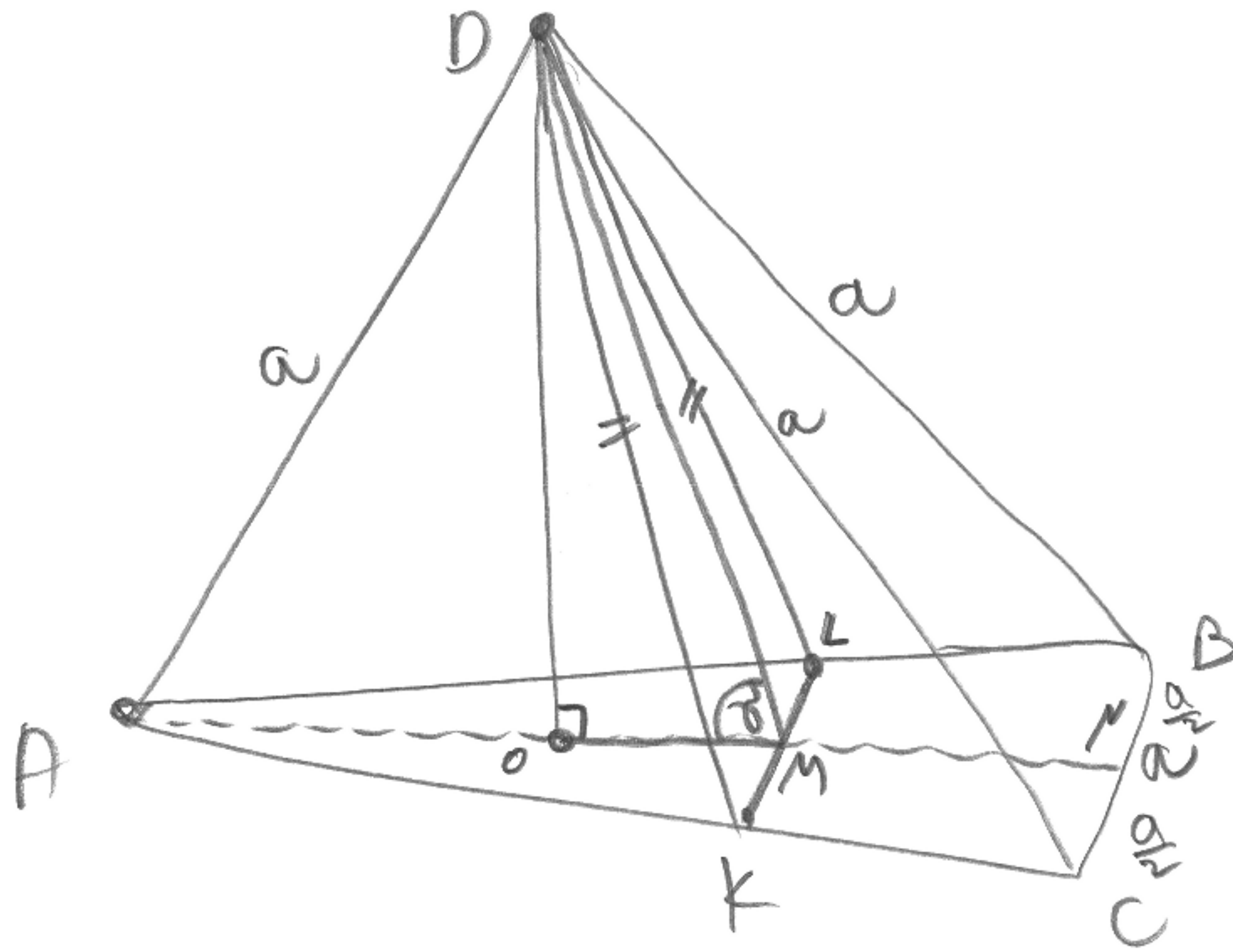
$$\int \frac{\frac{1}{2} dt}{t} = \frac{1}{2} \ln|t|$$

$$\frac{1}{2} \ln|x^2+1|$$

$$\int_0^1 1 + \frac{x}{x^2+1} dx = X + \frac{1}{2} \ln|x^2+1| \Big|_0^1$$

$$(1 + \frac{1}{2} \ln 2) - (0 + \frac{1}{2} \ln 1) = \boxed{1 + \frac{1}{2} \ln 2}$$

87878



$$DK \parallel BC$$

$$KL \parallel BC$$

$$\frac{a}{\sin 60} = 2R$$

$$\frac{a \cdot a}{\sqrt{3}} = 2R$$

$$\frac{a}{\sqrt{3}} = R$$

$$a^2 = H^2 + \frac{a^2}{3}$$

$$\frac{2a^2}{3} = H^2$$

$$\sqrt{\frac{2}{3}} a = H$$

$$V = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} a \cdot \frac{\sqrt{3} a^2}{4}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{12} a^3$$

$$\frac{1}{2} V = \frac{\sqrt{2} a^3}{6}$$

gleich
... 2/12

$$S_A = \frac{a \cdot a \cdot \sin 60}{2} =$$

$$\frac{\sqrt{3} a^2}{4}$$

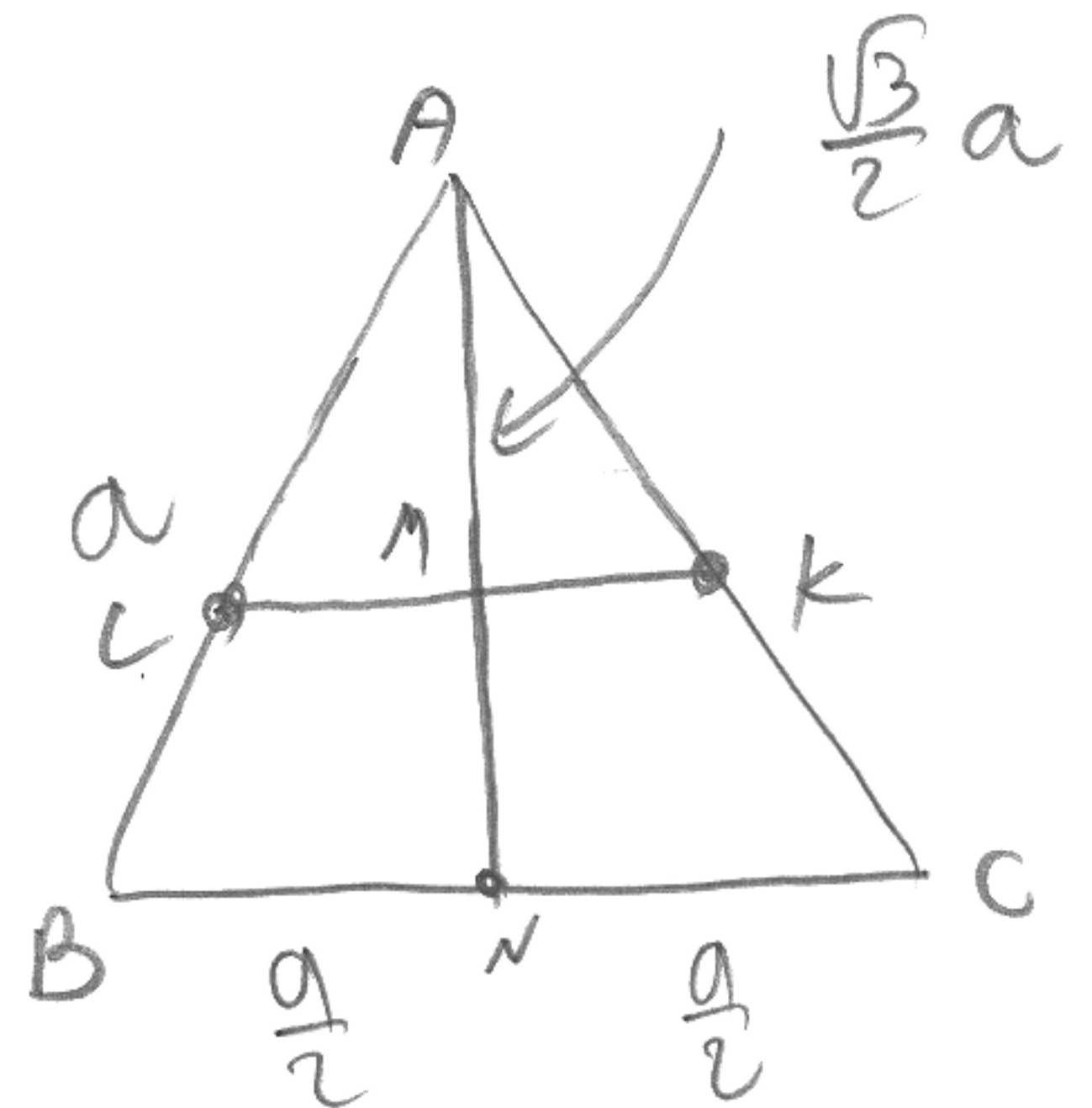
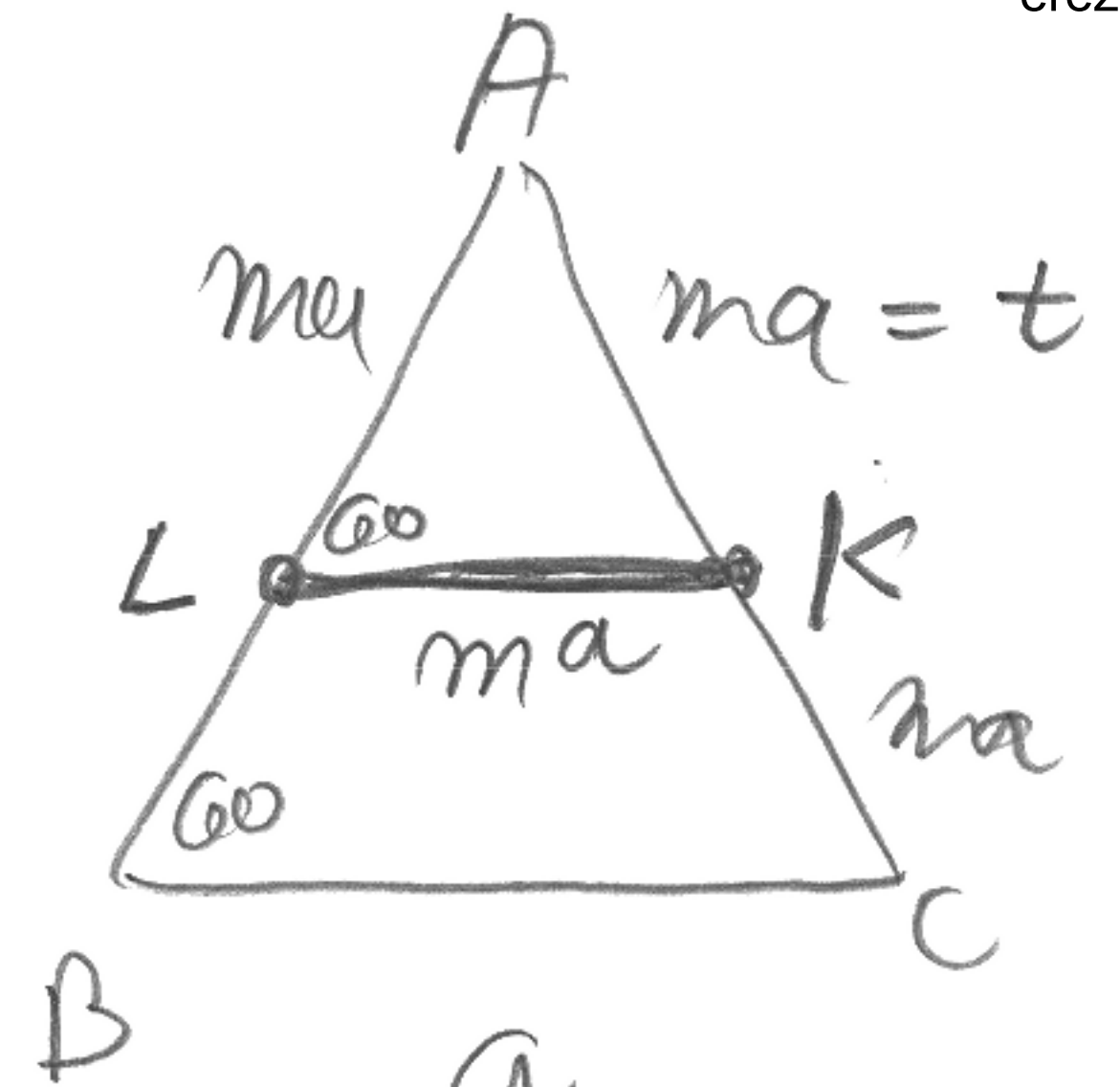
$$\cancel{\frac{1}{3}} \cdot \frac{t^2 \cdot \cancel{\sin 60}}{\cancel{2}} \cdot \cancel{A} \boxed{2} = \cancel{\frac{1}{3}} \frac{a^2 \cdot \cancel{\sin 60}}{\cancel{2}} \cdot \cancel{A}$$

$$2t^2 = a^2$$

$$\textcircled{k} \quad \boxed{t = \frac{\sqrt{2}}{2} a} = \underline{\underline{LK}}$$

$$\frac{AL}{AB} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} a}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{AM}{AN} \leftarrow \frac{\sqrt{3} a}{2}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3} a}{2} = MA = \frac{\sqrt{6} a}{4}$$



$$OM = \frac{\sqrt{6}a}{4} - \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}a}{4} - \frac{\sqrt{3}a}{3}$$

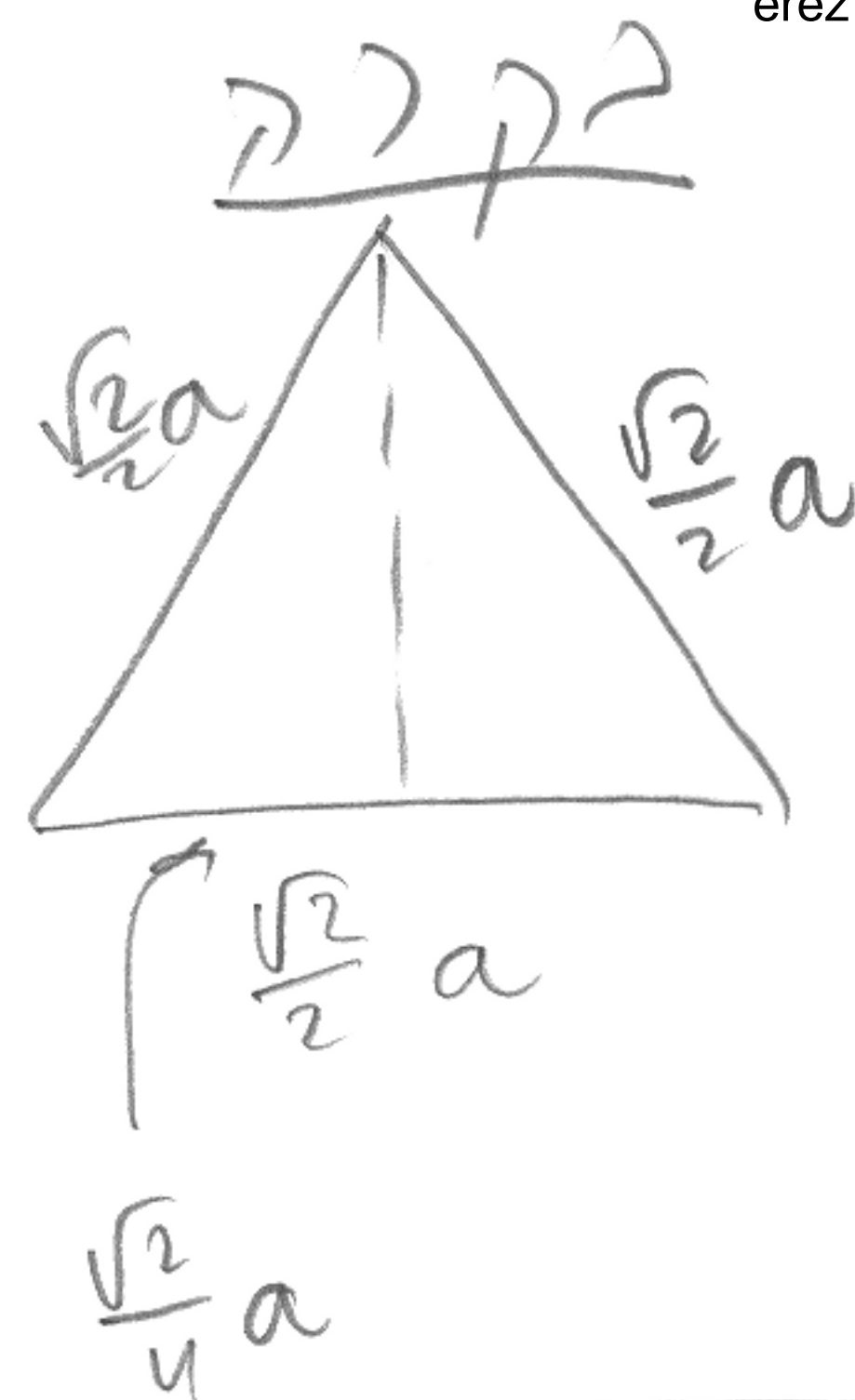
$$\textcircled{7} \quad \tan \alpha = \frac{DO}{OM} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{3}}{\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{3}}{\frac{3\sqrt{6} - 4\sqrt{3}}{12}}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{4 \cdot 3}{(3\sqrt{6} - 4\sqrt{3})} = \frac{4\sqrt{2}\sqrt{3}}{3\sqrt{2}\sqrt{3} - 4\sqrt{3}}$$

$$\frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{2} - 2\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{4(3+2\sqrt{2})}{9-8}$$

$$\underline{\underline{12 + 8\sqrt{2}}}$$

... .. δ כן δ כן



$$\sqrt{\frac{2}{4}a^2 - \frac{2}{16}a^2} =$$

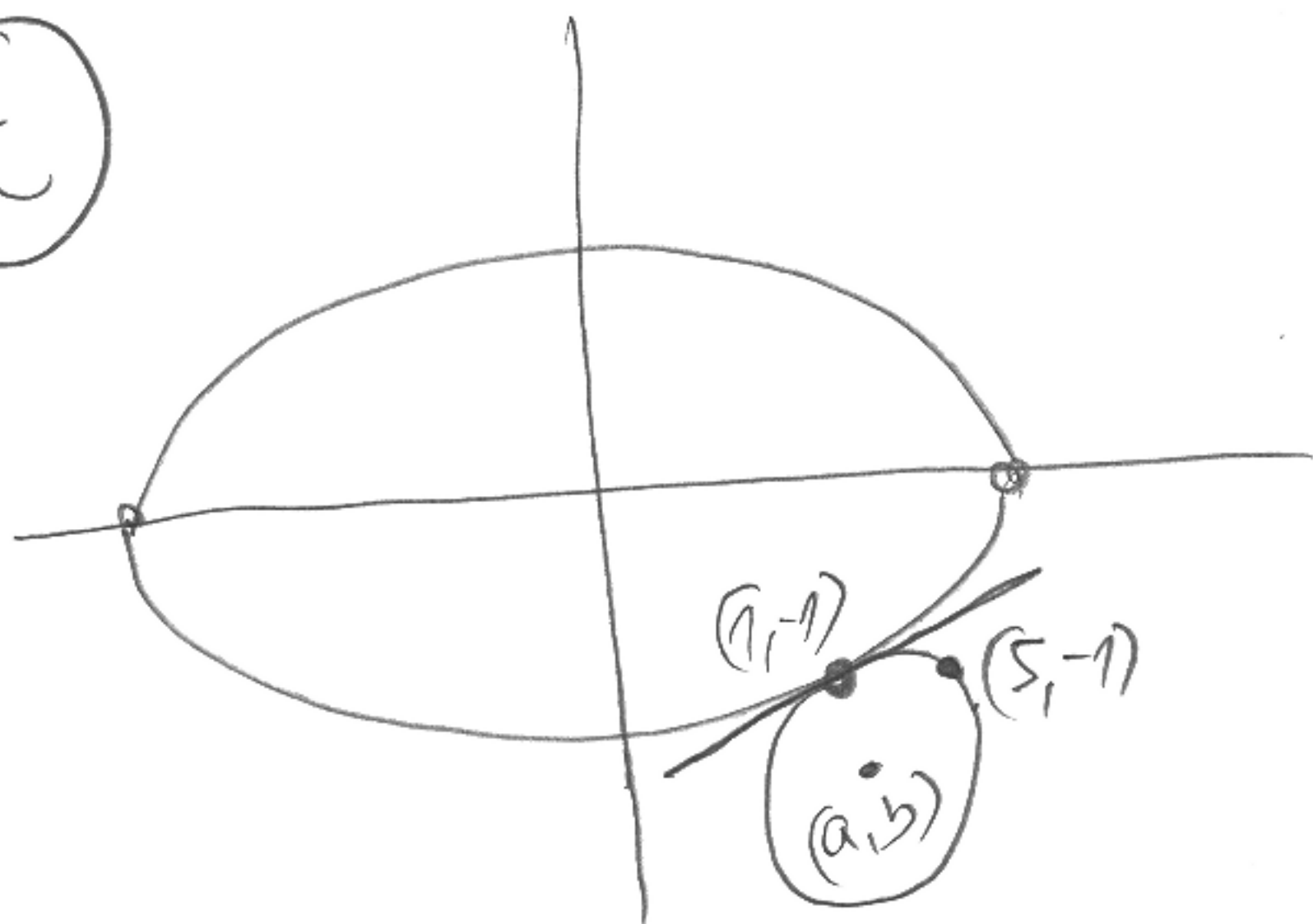
$$a\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{8}}$$

$$a\sqrt{\frac{3}{8}} = a\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

$$\textcircled{90} \quad \frac{a\sqrt{6}}{4} \checkmark$$

9 782

(k)



$$b+1 = -2a+2$$

$$b = 1 - 2a$$

$$\frac{(a-2+4a-3)^2}{5} = (a-5)^2 + (1-2a+1)^2$$

$$\frac{(5a-5)^2}{5} = (a-5)^2 + (2-2a)^2$$

$$x^2 + 2y^2 = 3$$

$$\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{\frac{3}{2}} = 1$$

$$xx_1 + 2yy_1 = 3$$

$$x - 2y = 3 \quad : \text{line}$$

$$x - 3 = 2y$$

$$\frac{1}{2}x - \frac{3}{2} = y$$

$$m = \frac{1}{2}$$

$$m_{\perp} = -2$$

$$x - 2y - 3 = 0$$

$$\frac{b+1}{a-1} = -2 \quad \left| \quad \frac{|a-2b-3|}{\sqrt{5}} = R$$

$$R^2 = (a-5)^2 + (b+1)^2$$

$$\frac{25(a-1)^2}{5} - 4(a-1)^2 = (a-5)^2$$

$$(a-1)^2 = (a-5)^2 \Rightarrow a-1 = a-5 \quad \phi$$

$$a-1 = -a+5$$

$$2a = 6$$

$$a = 3$$

$$b = -5$$

$$R^2 = 4 + 16 = 20$$

$$(x-3)^2 + (y+5)^2 = 20$$

נקודת המרכז

$$(x-3)(1-3) + (y+5)(-1+5) = 20$$

$$-2x + 6 + 4y + 20 = 20 \Rightarrow -2x + 4y + 6 = 0$$

$$x - 2y - 3 = 0$$



✓

$$(5, -1) \rightarrow 4 + 16 = 20 \quad \checkmark$$

נקודת המרכז

$$\textcircled{2} \quad z^3 + (1-i)^2 (1+i)^4 = 0$$

$$z^3 + 2 \cos(-90) \cdot 4 \cos 180 = 0$$

$$z^3 + 8 \cos 90 = 0$$

$$z^3 = -8 \cos 90 = 8 \cos 180 \cos 90$$

$$z^3 = 8 \cos 270$$

$$z = 2 \cos \left(\frac{270 + 360k}{3} \right)$$

$$z = 2 \cos(90 + 120k)$$

$$k = 0, 1, 2$$

$$1-i = \sqrt{2} \cos(-45)$$

$$1+i = \sqrt{2} \cos 45$$